$T \in P[a,b]$

نتيجة: إذا كانت الدالة $f(x)$ مشتقة محدودة على المجال المغلق $[a,b]$ فتكون محدودة التغير على هذا المجال

البرهان:

من أجل $a \leq x'' < x' \leq b$ حسب مبرهنة لاغرانج (مبرهنة التزايدات المحدودة)

$$\exists\, t \in]x'', x[\; : \; f(x') - f(x'') = f'(t)\cdot(x' - x'')$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f'(t)|\cdot|x' - x''| \leq M\cdot|x' - x''|$$

$$\exists M > 0 ; \; f'(x) \leq M \; : x \in [a,b]$$

لأنه كونها محدودة المشتق وهذا يعني بأن $f(x)$ تحقق شرط ليبشتز بالثابتة $M>0$ على $[a,b]$ فهي محدودة التغير على المجال.

P.S: إن هذه النتيجة تظل صحيحة في حال كانت الدالة $f(x)$ لا يوجد لها دالة مشتقة في عدد منتهٍ من بعض المجالات.

مبرهنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ مطردة على المجال المغلق $[a,b]$ فهي محدودة التغير على هذا المجال ويكون التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$$

الإثبات: لتكن T تجزئة ما اختيارية للمجال المغلق $[a,b]$

$T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ وبالتالي فإن

$$V(f,T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| =$$

$$\left|\sum (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| = |f(b) - f(a)|$$

والدالة المطردة القيمة المطلقة للمجموع تساوي مجموع القيم المطلقة وكون هذا العدد محدود فإن الدالة المعطاة هي دالة محدودة التغير

$$\sup_{T \in P[a,b]} V(f,T) = |f(b) - f(a)| \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$$

وهو المطلوب

محاضرة 3 صفحة 2

Subject:

P.S إذا كانت الدالة $f(x)$ مطردة على المجال المغلق $[a,+\infty[$ غير المحدود جزئياً تكون محدودة التغير على أي مجال جزئي منه قبيل $[a,A]$ حيث $\forall A>a$

وبالتالي نجد أن $\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f)$

$= \sup_{A>a} |f(A)-f(a)| = |f(\infty)-f(a)|$; $f(\infty)=\lim_{A\to\infty} f(A)$

تمرين لتكن الدالة المعرفة $f(x) = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x \sin x$

$= 3\sin x\cos x\,[\sin x - \cos x]$

$= 0 \Rightarrow$ إما $\sin x = 0 \Rightarrow x_{0,1,2} = 0, \pi, 2\pi$

أو $\cos x = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$

أو $x = \frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}$

أي أن الدالة المعروضة تكون مطردة على كل من المجالات

$[0,\frac{\pi}{4}], [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2},\pi], [\pi,\frac{5\pi}{4}], [\frac{5\pi}{4},3\frac{\pi}{2}], [3\frac{\pi}{2},2\pi]$

وبذلك تكون الدالة المعروضة محدودة التغير على كامل هذه المجالات كون الدالة مطردة على كل المجالات ويكون التغير الكلي مجموع التغيرات على حدها

$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) = \overset{\frac{\pi}{4}}{\underset{0}{V}}(f) + \dots + \overset{2\pi}{\underset{3\frac{\pi}{2}}{V}}$

نعوض $|f(a)-f(b)|$ على المجالات السابقة نجد التغير الكلي

$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) = 8-2\sqrt{2}$

$\overset{\frac{\pi}{4}}{\underset{0}{V}} f = |f(\frac{\pi}{4})-f(0)| = |(\frac{1}{\sqrt{2}})^3 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 - 1| = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

Scanned by CamScanner

محاضرة 3
صفحة 3

Subject:

مقلوب دالة محدودة التغير

P.S إن مقلوب دالة محدودة التغير على مجال ما وليكن $[a,b]$ ليست بالضرورة أن تكون دالة محدودة التغير على ذلك المجال فمثلاً إذا كان فإن الدالة $f(x)$ دالة فإن الدالة $\frac{1}{f(x)}$ أي مقلوبها لا تكون محدودة التغير على $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
لأنها غير محدودة بجوار النقطة x_0

مثال: لتكن الدالة $f(x) = x \;;\; x \in [0,1]$ إن هذه الدالة محدودة التغير على المجال $[0,1]$ وتغيرها هو

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(x) = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$$

ولنأخذ المقلوب $g(x) = \frac{1}{x} \Leftarrow g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \infty$ فهي غير محدودة التغير.

P.S من الممكن أن نصادف دوال مستمرة على مجال ما ولكن ليس بالضرورة أن يكون مشتقها محدود.

مثال: لنأخذ الدالة الآتية $f(x) = \sqrt[3]{x} \;;\; x \in [-1,1]$ نلاحظ أن هذه الدالة دالة تزايدية أي أنها مطردة على المجال $[-1,1]$ وبالتالي محدودة التغير لأن التغير الكلي

$$\overset{1}{\underset{-1}{V}}(\sqrt[3]{x}) = |(1)^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}}| = 2$$

ولكن من جهة ثانية نلاحظ أن $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ وبالتالي الدالة المشتقة تكون غير محدودة

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

مبرهنة: لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال المغلق $[a,b]$ إذا أمكن تجزئة هذا المجال إلى مجالات جزئية

$$[a, c_1][c_1, c_2], \ldots, [c_m, b]$$

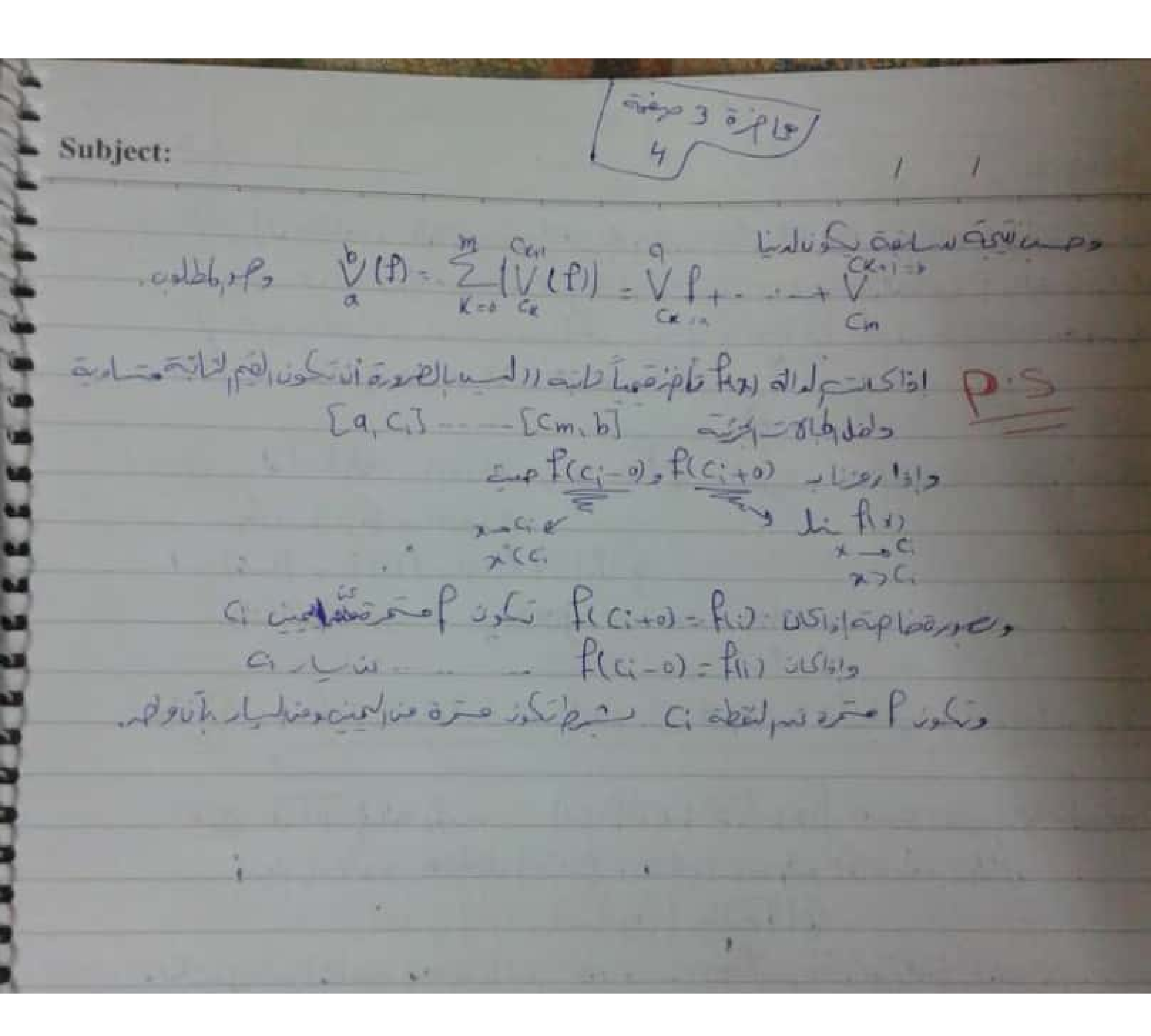
بحيث تكون الدالة $f(x)$ مطردة على كل منها فتكون محدودة التغير على المجال المغلق $[a,b]$ أي أن

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(c_1) - f(a)| + |f(c_2) - f(c_1)| + \cdots + |f(b) - f(c_m)|$$

البرهان: نفرض أن $c_k = a$ ، $c_{k+1} = b$ ، $[c_k, c_{k+1}] \;;\; k = 0, 1, \ldots$

طالما أن الدالة مطردة على المجالات الجزئية السابقة $[c_k, c_{k+1}]$ فتكون مطردة على المجال المغلق $[a,b]$ وبالتالي محدودة التغير على هذا المجال حيث

$$\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) = |f(c_{k+1}) - f(c_k)| \;;\; k = 0, 1, \ldots m$$



Subject: محاضرة 3 صفحة 4

ومن نتيجة سابقة يكون لدينا

$$\underset{a}{\overset{b}{V}}(f) = \sum_{k=0}^{m} \underset{c_k}{\overset{c_{k+1}}{V}}(f) = \underset{c_{k+1}}{\overset{a}{V}} f + \dots + \underset{c_m}{\overset{c_{k+1}=b}{V}}$$

وهو المطلوب.

P.S اذا كانت الدالة $f(x)$ تامة قيمها ثابتة ... ليس بالضرورة أن تكون القيم الثابتة متساوية داخل الفترات الجزئية $[a, c_1] \dots [c_m, b]$

واذا رمزنا بـ $f(c_i+0)$ و $f(c_i-0)$ حيث

$$\lim_{\substack{x \to c_i \\ x > c_i}} f(x) \qquad \substack{x \to c_i \\ x < c_i}$$

وبصورة خاصة اذا كان $f(c_i+0) = f(c_i)$ تكون f مستمرة من اليمين c_i

واذا كان $f(c_i-0) = f(c_i)$ ... ... من اليسار c_i

وتكون f مستمرة عند النقطة c_i بشرط تكون مستمرة من اليمين ومن اليسار بآن واحد.